Kapitel 2
Partielle Ordnungen

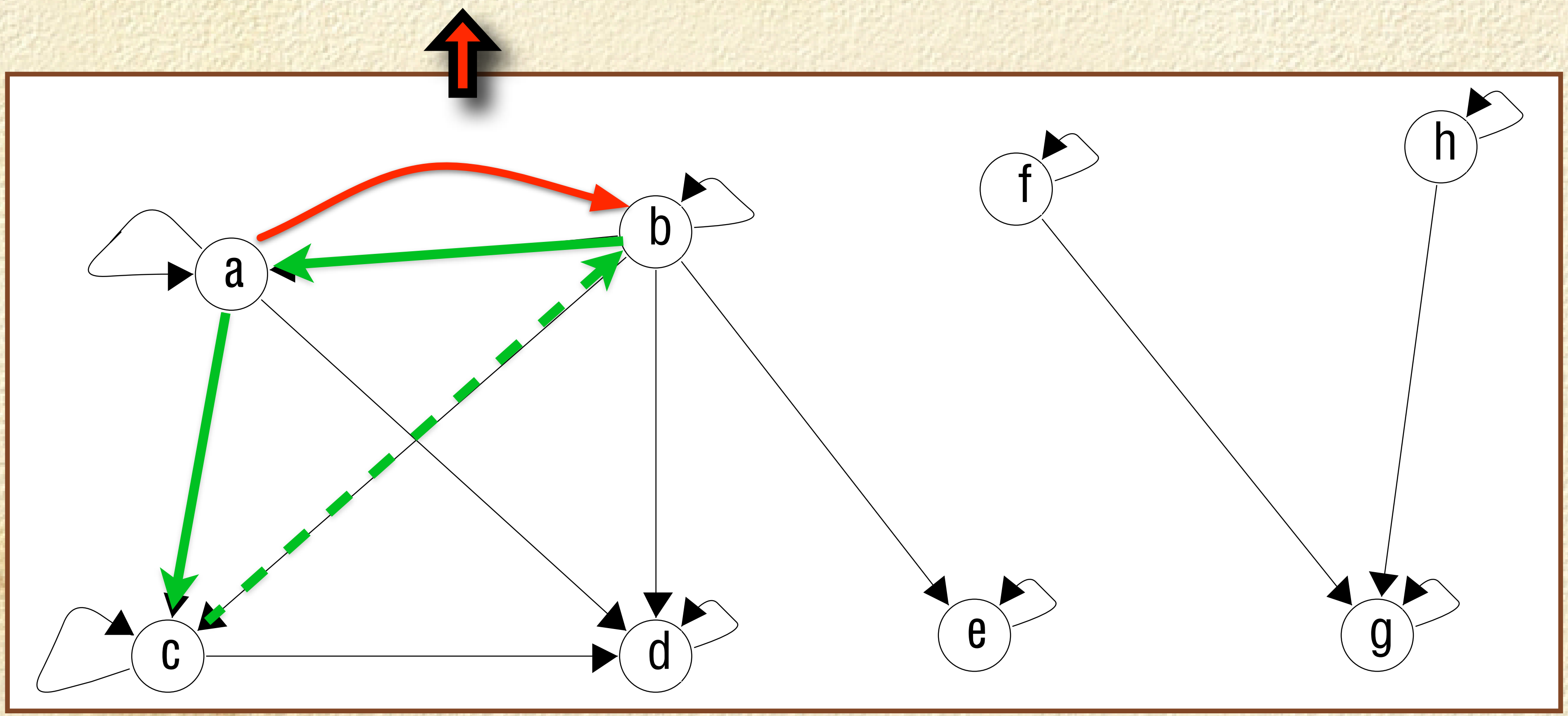
2 Partielle Ordnungen

Definition 2.2 . *Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine (binäre) Relation.*

a) *(A, R) heißt partielle Ordnung (partially ordered set, poset), falls gilt:*

1. $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$ "Reflexivität"
2. $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ "Antisymmetrie"
3. $\forall a, b, c \in A.\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ "Transitivität"

Schreibweise: $a \leq b$ für $(a, b) \in R$



Zyklen?

keine Zyklen !!!

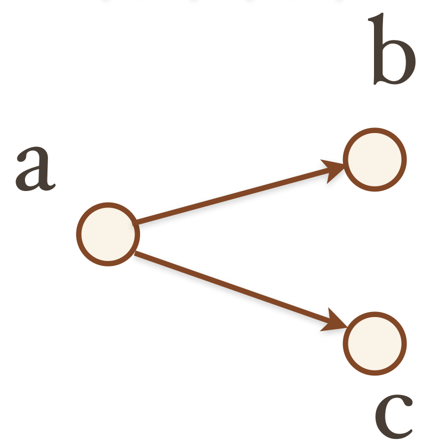
$$R = \{(a,a),(a,c),(b,a),\ldots\}$$

$R \subseteq A \times A$

Präsenzaufgabe 6.1: Seien $\leq$, R, R_1 und R_2 innere Relationen über derselben Basismenge A.

1. Sei $\leq$ eine partielle Ordnung. Ist $R = (\leq \cup \leq^{-1})$ eine Äquivalenzrelation?

   Lösung: Gegenbeispiel: Sei $a \leq b$ und $a \leq c$. Dann ist $R = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\} \cup id$ nicht transitiv, da $(b,a),(a,c) \in R$ gilt, aber nicht (b,c).



2. Zeige: Seien R_1 und R_2 partielle Ordnungen, dann ist $R_1 \cap R_2$ ebenfalls eine partielle Ordnung.

Lösung: $R = R_1 \cap R_2$ ist ebenfalls eine partielle Ordnung.

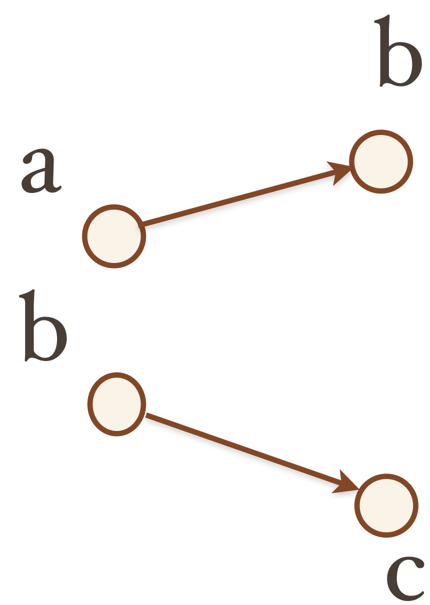
Reflexivität ist klar: Da $aR_ia, i = 1, 2$ für alle $a \in A$ gilt, ist auch aRa.

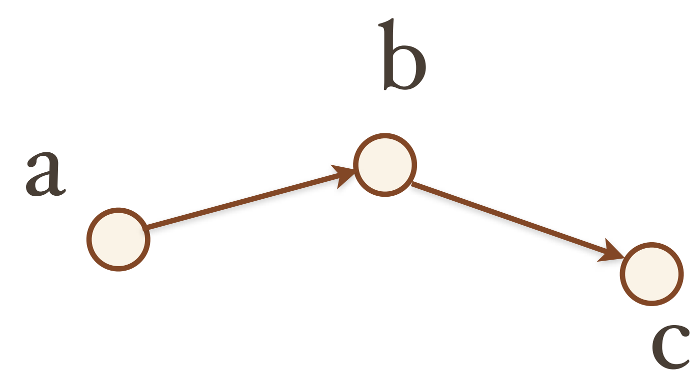
Antisymmetrie: Sei $aRb, bRa, i = 1, 2$, dann muss $aR_ib, bR_ia, i = 1, 2$ gewesen sein und da R_i antisymmetrisch ist, gilt auch $a = b$.

Transitivität. Sei $aRb, bRc, i = 1, 2$, dann muss $aR_ib, bR_ic, i = 1, 2$ gewesen sein und deswegen gilt auch $aR_ic, i = 1, 2$, also auch aRc.

3. Zeige: Seien R_1 und R_2 partielle Ordnungen, dann ist $R_1 \cup R_2$ i.a. keine partielle Ordnung.

Lösung: Gegenbeispiel: Sei $R_1 = \{(a, b)\} \cup id$ und $R_2 = \{(b, c)\} \cup id$. Dann ist $R := R_1 \cup R_2 = \{(a, b), (b, c)\} \cup id$ nicht transitiv, da $(a, b), (b, c) \in R$ gilt, aber nicht (a, c).



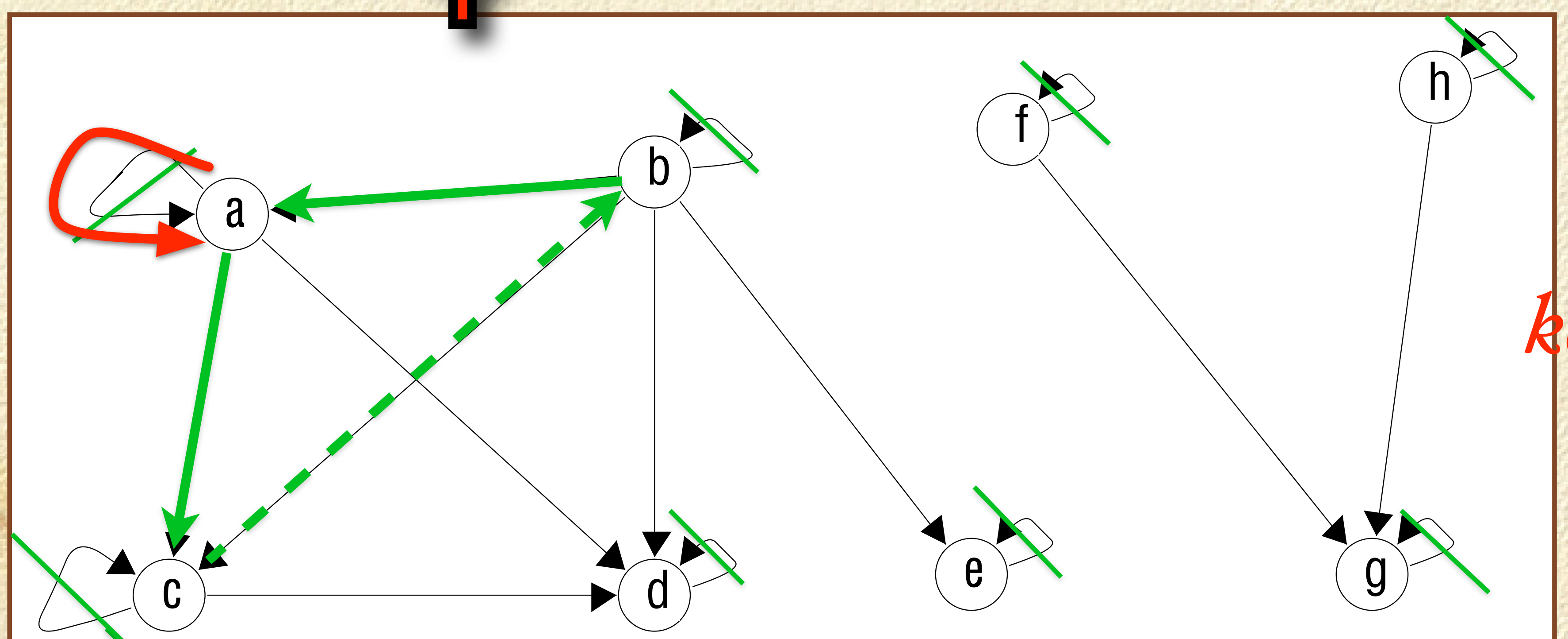


Definition 2.2 *Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine (binäre) Relation.*

~~a)~~ b) (A, R) *heißt* ~~*partielle Ordnung (partially ordered set, poset)*~~ *Striktordnung, falls gilt:*

1. $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R$ ~~"Reflexivität"~~ *Irreflexivität*
2. ~~$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$~~ ~~"Antisymmetrie"~~
3. $\forall a, b, c \in A.\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ "Transitivität"

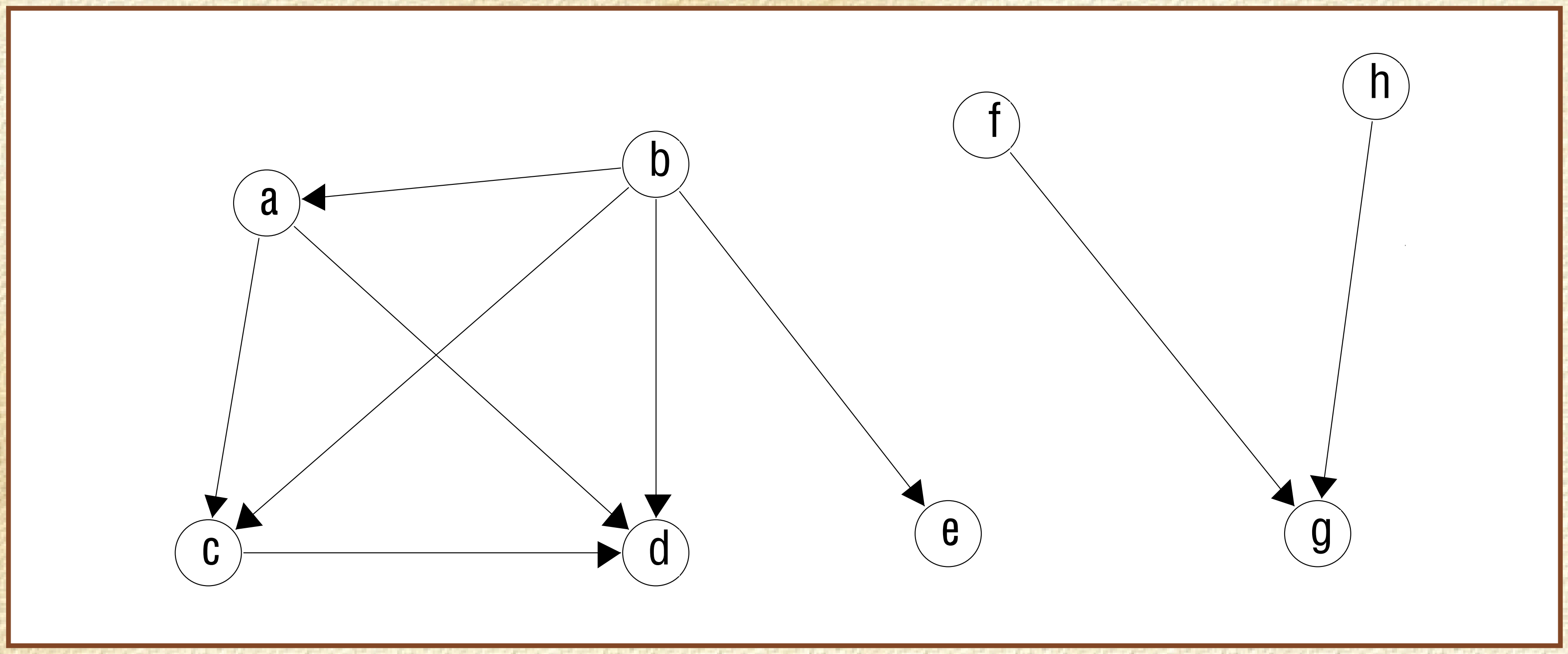
Schreibweise: $a < b$ *für* $(a, b) \in R$



Zyklen?

keine Zyklen !!!

$$R = \{(a,a),(a,c),(b,a),\ldots\}$$



strikte Ordnung

$$S = R - id = \{(b,a),(a,c),(b,c),\ldots\}$$

Definition 2.3

1. b *heißt* direkter Nachfolger *von* a *(in Zeichen:* $a \lessdot b$*), falls:*

   $$a \lessdot b :\Leftrightarrow a < b \wedge \neg\exists c \in A.\ a < c \wedge c < b$$

   keiner dazwischen

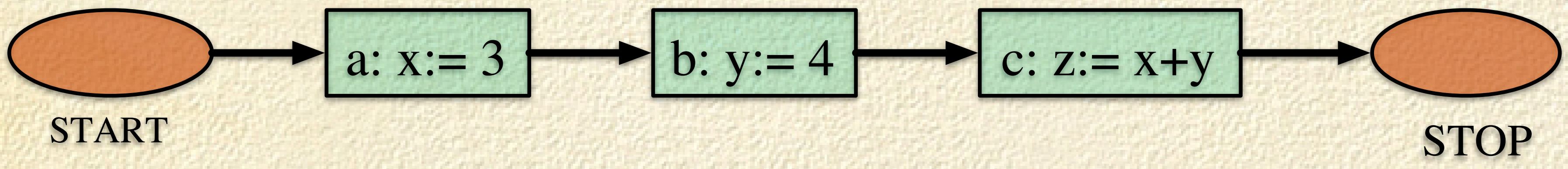
2. $(A, \lessdot)$ *heißt* *Präzedenzrelation* *zu* $(A, <)$.

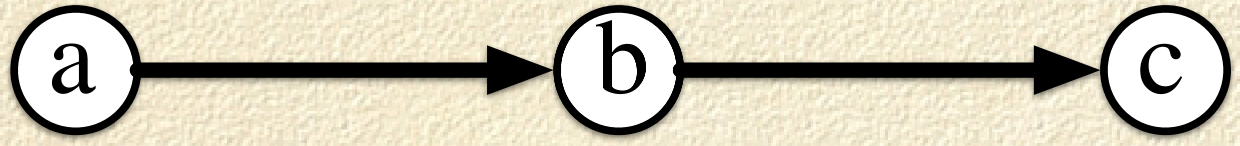
Präzedenz-Relation

c) (A,R) *heißt totale oder lineare Ordnung (totally ordered set), falls gilt:*

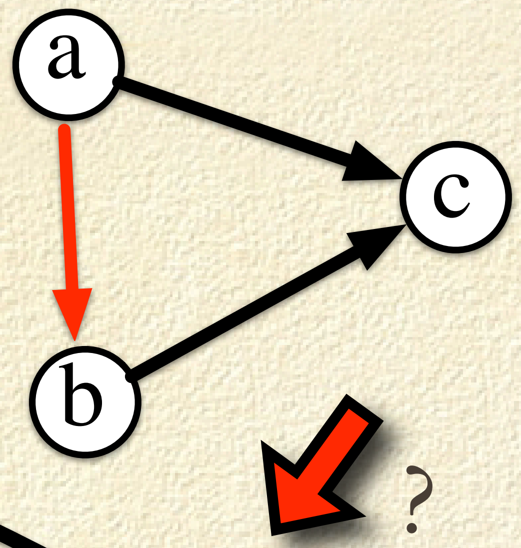
1. (A,R) *ist partielle Ordnung*
2. $\forall a,b \in A.\ a \neq b$ *impliziert* $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

"Vollständigkeit"





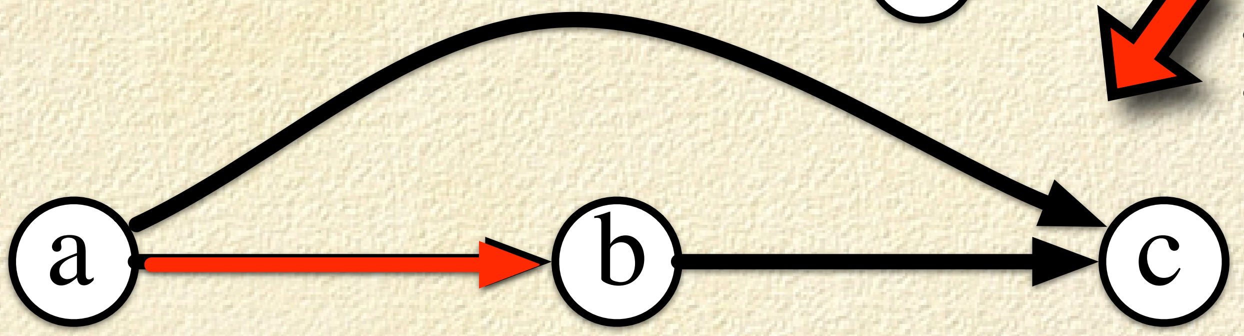
a;b;c und b;a;c



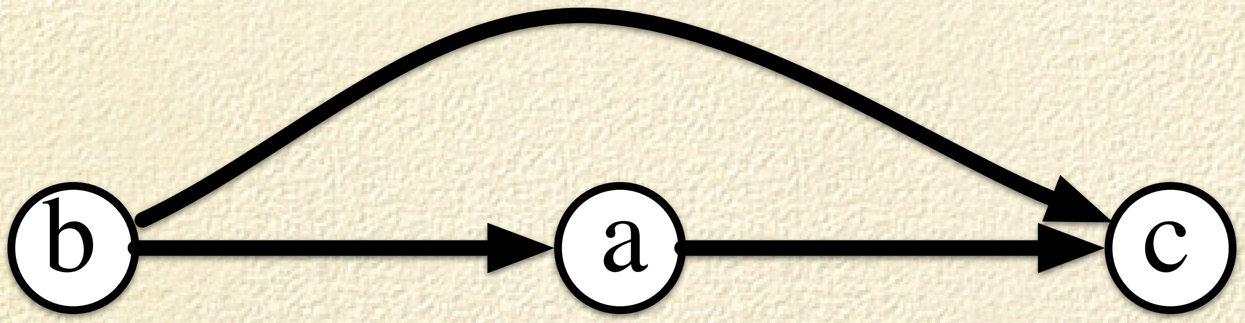
{(a,c),(b,c)}

interleaving semantics

Folgen-Semantik



{(a,b),(a,c),(b,c)}



{(b,a),(a,c),(b,c)}

e) Für eine Striktordnung $(A,<)$ ist

$Lin(A,<) := \{(A,<_1) | <_1$ ist lineare Striktordnung mit $\boxed{<\subseteq<_1}\}$

die Menge der linearen (oder seriellen) Vervollständigungen von $(A,<)$.

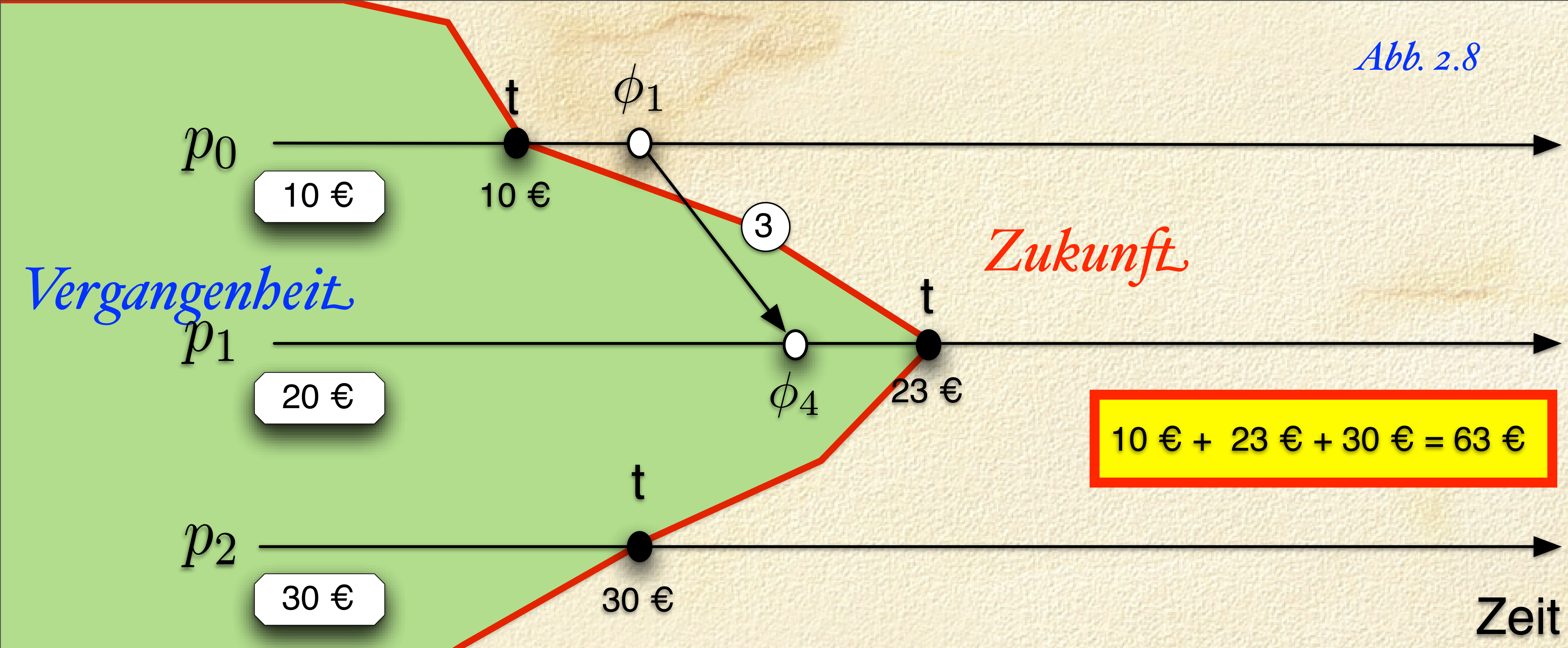
2.2 Logische und vektorielle Zeitstempel

globale Zeit

vs.

lokale Zeit

Abb. 2.8

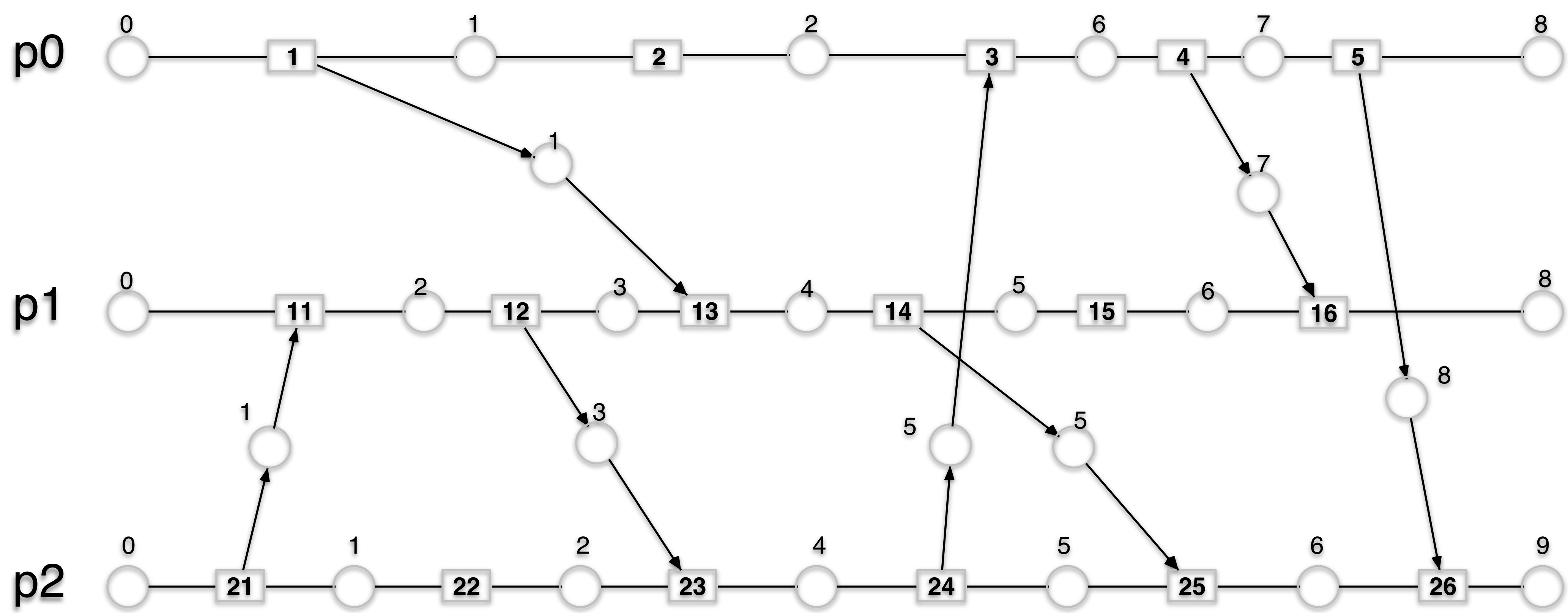


Deshalb stellt sich die Frage, wie die Relation *vor im* System beobachtet werden kann. Dazu bestimmen wir eine *logische Uhr* $LT(\phi)$ mit

$$\phi_1 \text{ } vor \text{ } \phi_2 \Rightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2).$$

Zur Realisierung führt jede Funktionseinheit p_i eine Variable LT_i mit Anfangswert $LT_i = 0$ mit. Den Nachrichten wird der neue Wert des Sendeereignisses beigefügt (*logische Zeitstempel*). Ein Ereignis ϕ von p_i setzt LT_i auf einen um 1 größeren Wert als das Maximum des alten Wertes und eines ggf. in ϕ empfangenen Zeitstempels.

Präsenzaufgabe 6.2: Gegeben sei das folgende Zeitskalenmodell. Die Ereignisse ϕ_i werden in der Abbildung mit i abgekürzt.



1. Geben Sie $LT(\phi_i)$ für alle ϕ_i an.

2. Ist die Relation $\cdot$**vor**$\cdot$ i.a. eine strikte Ordnung? Eine totale strikte Ordnung?

3. Warum gilt $\phi_1 \mathbf{vor} \phi_2 \Longrightarrow LT(\phi_1) < LT(\phi_2)$?

4. Warum gilt aber die Umkehrung $LT(\phi_1) < LT(\phi_2) \Longrightarrow \phi_1 \mathbf{vor} \phi_2$ nicht?

Definition 2.6 *Es wird eine Relation* $\boxed{\text{vor}} \subseteq \Phi \times \Phi$ *definiert. Für* $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ *gelte* (ϕ_1 *vor* ϕ_2), *falls folgendes gilt:*

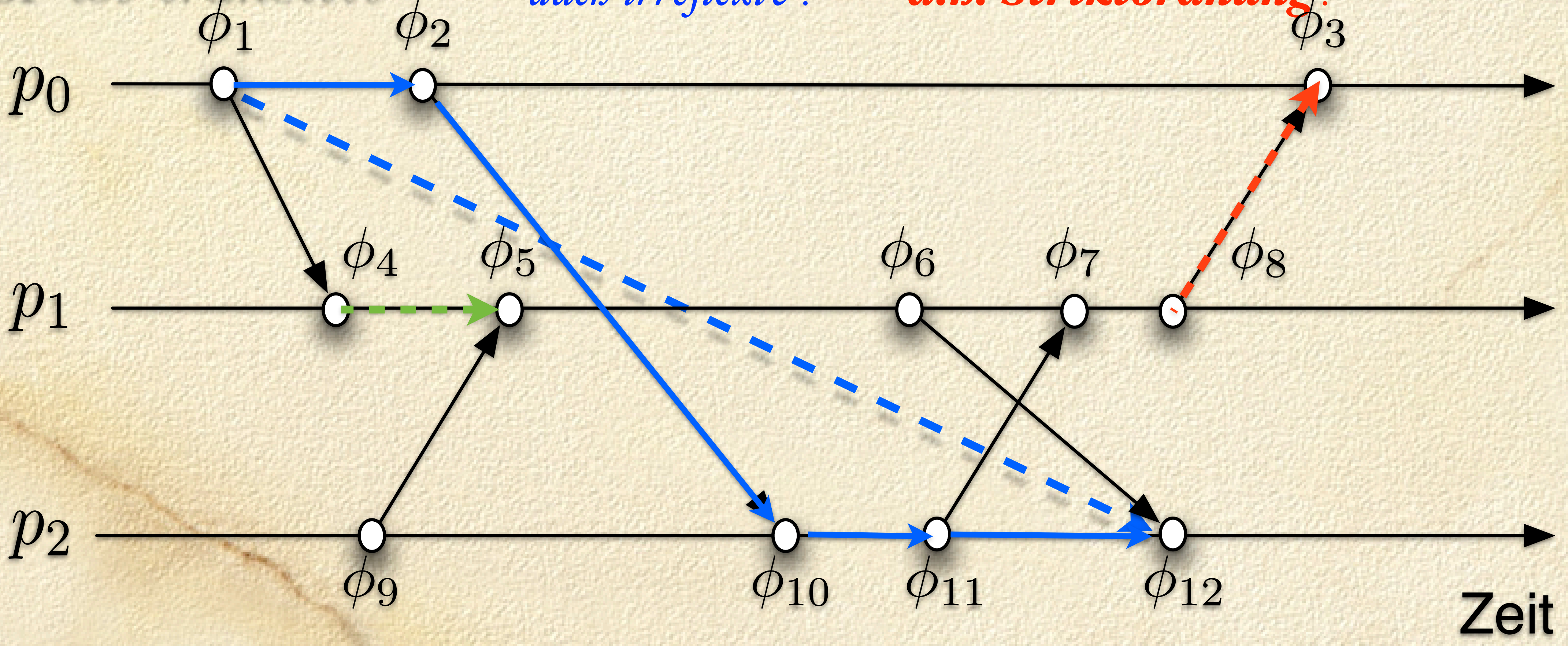
a) *Gehören* ϕ_1 *und* ϕ_2 *zu dem* $\boxed{\textit{selben}}$ *Prozessor (d.h. sie liegen auf der selben (linear geordneten) Zeitachse), dann gilt* (ϕ_1 **vor** ϕ_2) *genau dann, wenn* ϕ_1 *vor* ϕ_2 *auf der Zeitachse liegt.*

b) *Gehören* ϕ_1 *und* ϕ_2 *zu* $\boxed{\textit{verschiedenen}}$ *Prozessoren (d.h. sie liegen auf verschiedenen Zeitachsen) und ist* ϕ_1 *das Sendeereignis einer Nachricht, die in* ϕ_2 *empfangen wird, dann gilt* (ϕ_1 vor ϕ_2).

c) vor *ist transitiv*

auch irreflexiv ?

d.h. Striktordnung ?



Definition 2.16 *(Vektorzeit, vektorieller Zeitstempel)*
*Jede Funktionseinheit p_i führt eine Variable $\vec{v}_i$ mit Werten in $\mathbb{N}^n$ (*lokale Vektorzeit*) und dem Nullvektor $\vec{0}$ als Anfangswert. Falls p_i ein Ereignis ϕ bearbeitet, wird der Zeitstempel $\vec{v}_i$ wie folgt aktualisiert:*

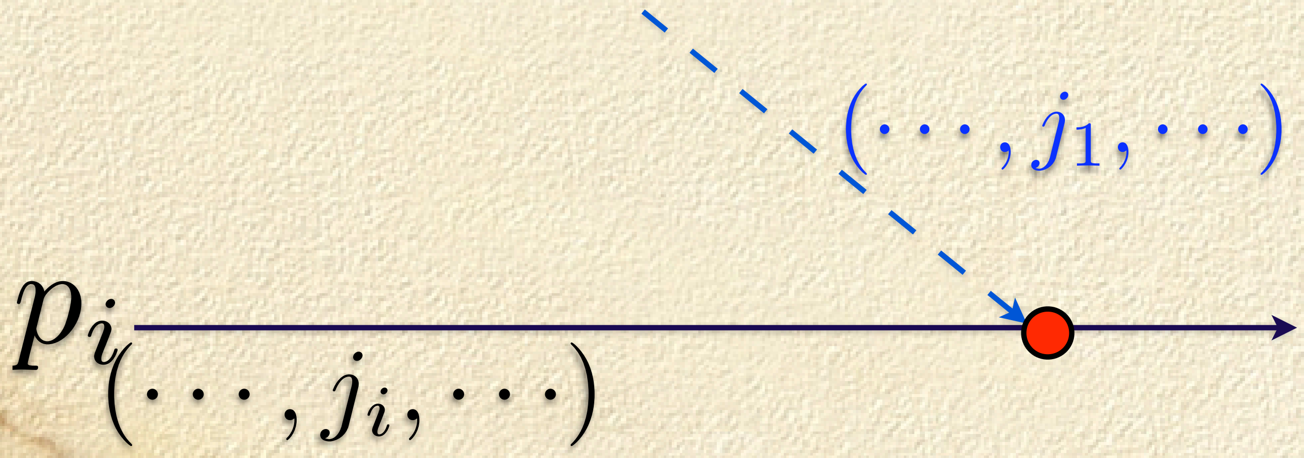
Für die eigene Komponente i von p_i gelte:

$\vec{v}_i[i] \mapsto \vec{v}_i[i] + 1$ *(Inkrementieren des eigenen Stempels)*

Für die anderen Komponenten $j \neq i$ von p_i gelte:

$\vec{v}_i[j] \mapsto \max(\vec{v}_i[j], \vec{VT}_m[j])$ *falls eine Nachricht m mit dem Vektorzeitstempel $\vec{VT}_m$ empfangen wird. Wird keine Nachricht empfangen, bleibt $\vec{v}_i[j]$ unverändert ($j \neq i$).*

(Aktualisieren der anderen Komponenten)



5. Was ändert sich an Teilfragen 3. und 4., wenn wir mit vektoriellen Zeitstempeln arbeiten?

Lösung: $\phi_1 \mathbf{vor} \phi_2 \implies VC(\phi_1) < VC(\phi_2)$ gilt weiterhin, die Argumentation läuft analog zu LT. Bei jedem Ereignis wird das komponentenweise Maximum der eingehenden Zeitstempel gebildet und um 1 in der zu p_i gehörenden Komponente vergrößert.

$VC(\phi_1) < VC(\phi_2) \implies \phi_1 \mathbf{vor} \phi_2$ gilt nun auch, da die vektoriellen Zeitstempel von Ereignissen, welche nicht in Relation stehen, ebenfalls unvergleichbar sind (Satz 2.19).